КОНГРУЕНЦИЈА И АРИТМЕТИКА ЧАСОВНИКА

CONGRUENCE AND ARITHMETIC OF CLOCK

Аутор: Стефан Стефановић, ученик $VIII_5$, ОШ ``8. октобар`` Власотинце

Регионални центар за таленте Врање

Ментор: Светлана Коцић, професор математике ОШ ``8. октобар`` Власотинце

РЕЗИМЕ

Овај рад обухвата део поглавља који се не обрађује у редовној настави за основну школу, припада теорији бројева и назива се " Конгруенције". На додатној настави са наставницом сам сазнао нешто више о Конгруенцијама по модулу. Пожелео сам да сазнам нешто више о проблематици часовника и у томе ми је помогла Аритметика часовника спојена конгруенцијом по модулу 12 (mod 12). Основа за разматрања на вишем нивоу обрађена је у петом разреду у наставној теми ˝Дељивост неким бројевима˝. Сва ова сазнања помогла су ми да упознам и разумем многе недоумице из свакодневног живота везане за часовник и рачунање времена.

Кључне речи: конгруенција, модул, аритметика, часовник, време, дељивост.

Summary

This work includes chapter part that is not dealt with during regular classes at primary school, belonging to theory of numbers and is called ˝Congruence˝. During additional classes with my teacher, I found out something more about Congruence according to module. I wished to learn a bit more about problems of clock and what helped me with it was Arithmetic of clock connected to congruence according to module 12 (mod 12). Basis for consideration on a higher level was dealt with at fifth grade in teaching topic ˝Divisibility by some numbers˝. Whole this knowledge helped me to be familiar with and understand many dilemmas from everyday life related to clock and measuring of time.

Key words: congruence, module, arithmetic, clock, time, divisibility

УВОД

Полазак у школу везан је за стицање првих занања из математике. Бројеви су од почетка највише привлачили моју пажњу. Са лакоћом сам савладао основне рачунске операције.

Нисам имао проблема са сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем, док није дошао на ред часовник и рачунање времена. Појавило се једно питање које ми је задавало проблеме: ˝ Како је могуће да ученик пође у школу у 8 часова, тамо проведе 5 часова, а врати се кући у 1 час? ˝. Следеће питање које је стварало код мене забуну везано је за поподневно исказивање времена: 1 час – 13 часова, 2 часа – 14 часова... Није ми било јасно шта то бројеви 1 и 13, 2 и 14... имају заједничко. Чинило ми се да то нема везе са математиком, па сам то усвојио као чињеницу.

Међутим, сада полако успевам да одгонетнем оно што је за мене некада била загонетка. Кључ проблема се ипак налази у математичком објашњењу. Решење је садржано у области која носи назив Конгруенција по модулу.

Објашњење следи у даљем излагању.

Листа симбола

Симбол	Назив симбола
$\vert$	дели, се садржи
$\vert a \vert$	апсолутна вредност неког броја
$\equiv$	конгруентно
mod	модул
▯	и
$\Rightarrow$	следи
$\oplus$	сабирање у аритметици часовника
$\ominus$	одузимање у аритметици часовника
$^{\circ}$	степени

ДЕЉИВОСТ НЕКИМ БРОЈЕВИМА

У оквиру редовне наставе у петом разреду основне школе предвиђена је наставна тема ˝ Дељивост неким бројевима˝.

Када је у питању дељивост бројевима 2 и 5 уочава се да дељивост зависи од последње цифре датог броја (цифре јединица).

Број је дељив са 2 ако је последња цифра тог броја 0,2,4,6 или 8.

Долази се до појмова *паран и непаран* број као и облика записивања $2k$ *и* $2k + 1$ ($k \in N_0$).

Правило дељивости бројем 5 је веома једноставно.

Број је дељив са 5 ако је последња цифра тог броја 0 или 5.

Код дељивости бројевима 4 и 25 важно је да се уоче последње две цифре броја, цифра десетица и цифра јединица, које представљају двоцифрени завршетак броја.

Број је дељив са 4 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 4, тј. ако су последње две цифре тог броја 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24...

Број је дељив са 25 када му је двоцифрени завршетак дељив са 25, тј. ако су последње две цифре тог броја 00, 25, 50 или 75.

Задатак 1. Испитати тачност следећих тврђења (без израчунавања) :

а) $25 \mid 625$ б) $25 \mid 12345$ в) $25 \mid (775+850)$ г) $25 \mid (1225-775)$ д) $25 \mid 16 \cdot 35$

ђ) $25 \mid 100 \cdot 33$

Решење : а) тачно б) нетачно в) тачно г) тачно д) нетачно ђ) тачно

Ако се зна да је збир дељив неким бројем ако су сви сабирци дељиви тим бројем, а да је производ дељив неким бројем ако је бар један чинилац дељив тим бројем, користећи ова својства долази се до правила дељивости са 3 и 9.

Број је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9.

Број је дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3.

На основу познавања претходних својстава лако се испитује дељивост са 6, 12, 15, 36.

Задатак 2. Испитај дељивост :

а) броја 126 са 6 б) броја 480 са 15 в) броја 288 са 12 г) броја 756 са 36

Решење : а) С обзиром да је $2 \cdot 3 = 6$ довољно је испитати дељивост броја 126 са 2 и 3.

б) Број 480 је дељив бројем 15, јер је дељив бројем 5 и бројем 3.

в) Број 288 је дељив бројем 12, јер је дељив бројем 3 (2+8+8) и дељив је бројем 4 (двоцифрени завршетак је 88).

г) Број 756 је дељив бројем 36, јер је дељив бројем 9 (7+5+6) и двоцифрени завршетак (56) је дељив бројем 4.

Нека су a, b и q, $b \neq 0$ три цела броја таква да је $a = b \cdot q$. Тада је број a дељив бројем b и количник је q. Ако a није дељиво са b тада постоји цео број q и природан број $r < |b|$ тако да је $a = b \cdot q + r$.

Број r називамо остатком дељења броја a са b. Овај остатак пружа доста могућности и помаже у решавању неких ˝ незгодних ˝ задатака.

РЕЛАЦИЈА КОНГУРЕНЦИЈЕ

Ако цео број a делимо са 2, може се догодити или да буде дељив или да даје остатак 1. На тај начин су цели бројеви разложени на дисјунктне класе бројева, на парне и непарне бројеве. Може да се посматра дељење и остаци при томе ма којим природниом бројем m. Следећи основни појам увео је Гаус.

Дефиниција 1. Нека је дат природан број m, већи од 1. Два цела броја a и b су конгурентна по модулу m ако дају исти остатак при дељењу са m. Пишемо

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Теорема 1.

1° $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако је $a = b + mt$ за неки цео број t.

2° $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако је разлика бројева a и b дељива са m.

3° Бити когурентан по датом модулу је релација еквиваленције у скупу целих бројева Z.

Доказ. Релација конгуренције по модулу m је рефлексивна, симетрична и транзитивна. Заиста, за свака три цела броја a,b и c важи

(1) $a \equiv a \pmod{m}$, јер је $a - a = 0 \wedge m \mid 0$

(2) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a - b) \Rightarrow m \mid (b - a) = -(a - b) \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$;

(3) $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a - b) \wedge m \mid (b - c) \Rightarrow$

$m \mid (a - c) = (a - b) + (b - c) \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.

Овим је доказано да је конгуренција по модулу m релација еквиваленције. Конгуренција по модулу m је сагласна са алгебарским операцијама, тј. важи следећа теорема.

Теорема 2. Ако је $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, тада је

1° $a+c \equiv b+d \bmod m$;

2° $a - c \equiv b - d \bmod m$;

3° $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

АРИТМЕТИКА ЧАСОВНИКА

Ово поглавље објашњава које рачунске операције и на који начин можемо обављати на часовнику. Садржи задатке који се односе на решавање проблема кретања казаљки на сату.

На часовнику часови, обично, означени природним бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10, 11, 12 тј. елемнтима скупа бројева

H = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10, 11, 12}.

Са овим бројевима често изводимо рачунску операцију ˝ сабирање на часовнику ˝. Тако, на пример, ако Марко пође на пут када часовник показује 6 часова (слика 1) и ако до циља треба да путује 6 часова, онда ће он, као што показује слика 2, стићи на циљ када часовник показује 12 часова, јер је

$$6 + 6 = 12$$

сл. 1

сл. 2

Међутим, ако Иван пође на пут када часовник показује 6 часова (слика 3) и ако до циља треба да путује 9 часова, онда ће он, као што показује слика 4 стићи на циљ када часовник показује 3 часа. Према томе, у овом случају је за ˝ сабирање на часовнику ˝ тачно тврђење (истинит исказ)

$$6 + 9 = 3$$

сл. 3

сл. 4

Слично томе, путем ˝ сабирања на часовнику ˝ налазимо да је, на пример :

9+2= 11, 9+4= 1,

9+3 =12, 9+5=2, и тако даље

одакле није тешко закључити да ако се ради о природним бројевима чији је збир мањи од 12 или једнак 12, тада је ˝ сабирање на часовнику ˝ исто као и обично сабирање. Али, ако се ради о сабирању природних бројева чији је збир већи од 12, тада ˝ сабирање на часовнику ˝ није исто што и обично сабирање. Стога, да би се ово сабирање разликовало од обичног сабирања (за које се употребљава знак +), употребљаваћемо знак ⊕ за ˝ сабирање на часовнику ˝. Користећи се тиме, предходне исказе написаћемо на следећи начин :

$7 \oplus 4 = 11$, $7 \oplus 8 = 3$, $9 \oplus 2 = 11$,

$9 \oplus 4 = 1$, $9 \oplus 3 = 12$, $9 \oplus 5 = 2$

За ˝ сабирање на часовнику ˝, односно за рачунску радњу ⊕ важи следећа таблица:

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

табела 1, сабирање у аритметици часовника

table 1, adding in arithmetic of clock

На основу тога, рачунска радња ⊕ одређује се помоћу рачунске радње + на следећи начин :

За све бројеве a и b из скупа Н добија се број $a \oplus b$ који је такође у скупу Н, и то:

$$a \oplus b = a + b \qquad \text{ако је } a + b \leq 12,$$

$$a \oplus b = a + b - 12 \qquad \text{ако је } a + b \geq 12.$$

Запазимо да је за ˝ сабирање на часовнику ˝, тј. за рачунску радњу ⊕, карактеристично то да је, за било који број а из скупа Н, увек

$$a \oplus 12 = a$$

што значи да се у том необичном сабирању број 12 понаша као 0 у обичном сабирању. Иначе, претходна таблица нам може показати да, додајући броју а број b добијамо исти збир као и када броју b додајемо број a. На пример:

$$6 \oplus 8 = 8 \oplus 6 = 2$$

Исто тако је,на пример: $(5 \oplus 9) \oplus 6 = 5 \oplus (9 \oplus 6)$,

што значи да се резултат ˝ сабирања на часовнику ˝ неће променити ако се поредак сабирака промени или ако се сабирци по вољи спајају у групе, а то су , као што знамо, и својства обичног сабирања.

Поред сабирања, на часовнику можемо изводити и одузимање бројева скупа H, рачунску радњу ˝одузимање на часовнику ˝ обележаваћемо знаком $\ominus$. И као што је код одузимања разлика два броја a и b трећи број (који обележавамо са a-b) којем треба додати број b да би се добио a, на пример: разлика бројева 11 и 5 је број 11-5 којем треба додати број 5 да би се добио број 11:

$$11 - 5 = 6 \qquad 6 + 5 = 11$$

то јест

$$(a - b)+b=a$$

тако исто је, на часовнику,

$$(a - b)+b=a$$

на пример,

$$3 \ominus 8 = 7$$

јер је, према таблици ˝ сабирања на часовнику ˝, $7 \ominus 8 = 3$. Међутим, док је код обичног одузимања разлика два једнака броја једнака 0, дотле је код ˝одузимање на часовнику ˝ разлика два једнака броја једнака 12, на пример:

$$4 \ominus 4 = 12, \qquad 11 \ominus 11 = 12, \qquad 12 \ominus 12 = 12,$$

и уопште за сваки број a из скупа H је

$$a \ominus a = 12.$$

Сада можемо извршити следећа израчунавања:

$$(7 \oplus 12 \ominus 5) \ominus (3 \ominus 10) = (7 \ominus 5) \ominus 5 = 2 \ominus 5 = 9$$

$$2 \cdot (5 \oplus 8) = (5 \oplus 8) + (5 \oplus 8) = 1 \oplus 1 = 2$$

ПРОБЛЕМИ КРЕТАЊА КАЗАЉКИ НА САТУ

Задатак 1. Колико пута у току једног дана и ноћи (за 24 часа) казаљке сата граде прав угао ?

Решење: Између поднева и 1 сата поподне, казаљке образују прав угао два пута. Да бисмо одредили када се то дешава уочимо да централном углу од 6º одговара подеок за 1 минут времена, па правом углу одговара на временској скали 15 минута. Мала казаљка је 12 пута спорија од минутне казаљке. Нека такав угао између казаљки формира тачно x минута после 12 часова. То записујемо једначином $x - \frac{x}{12} = 15$.

Решење ове једначине је $x = 16\frac{4}{11}$ минута. Други пут имамо прав угао у минуту после 12 часова. Тада имамо једначину : $60 - y + \frac{y}{12} = 15$, чије је решење $y = 4\frac{1}{11}$ минута. Како је $y - x = 32\frac{8}{11}$, то ће после сваких $32\frac{8}{11}$ минута казаљке одређивати прав угао. За 12 часова велика казаљка је направила 720 минута, па како је $22 \cdot 32\frac{8}{11} = 720$, следи да ће за 12 часова казаљке 22 пута одређивати прав угао, а за дан и ноћ биће у том положају 44 пута.

Задатак 2. Када је купац ушао у продавницу, сат је показивао 15 часова. За колико је времена завршио куповину ако је из продавнице изашао у тренутку када су се казаљке први пут поклопиле?

Решење: Велика казаљка је 12 пута бржа од мале, а она се налази на подеоку који означава 15 минута. Ако са x означимо колико је минута трајала куповина, имаћемо једначину: $15 + \frac{x}{12} = x$, одакле је $x = 16\frac{4}{11}$ минута.

Задатак 3. Сада је тачно 9 сати. После колико времена ће казаљке први пут заклапати угао од 50º ?

Решење: У 9 сати мала казаљка ˝бежи˝ великој за 270º. Угао између казаљки се после 9 сати смањује да би у једном тренутку био 50º. Нека се то деси x минута после 9 сати. Док велика казаљка ˝пређе˝ 60 минута, мала казаљка ˝пређе˝ само 5 минута, тј. велика прелази 6º у минуту, а мала само 0,5º. Тада је $270^\circ + 0{,}5^\circ \cdot x = 6^\circ \cdot x + 50^\circ$. Дакле, $5{,}5^\circ \cdot x = 220^\circ$, па је $x = 40$ минута.

Задатак 4. Колико пута ће се од поноћи до поднева поклопити мала и велика казаљка на сату, не рачунајући поноћ, а рачунајући подне? Израчунати времена тих поклапања.

Решење: Од поноћи до поднева велика казаљка пређе 12 пуних кругова. У сваком кругу, сем у првом, мала и велика казаљка ће се поклопити, што значи да ће бити 11 поклапања. Та поклапања ће се дешавати сваких $\frac{12}{11}$ сати.

Времена поклапања биће:

$1\frac{1}{11}\ h$, $2\frac{2}{11}\ h$, $3\frac{3}{11}\ h$, $4\frac{4}{11}\ h$, $5\frac{5}{11}\ h$, $6\frac{6}{11}\ h$, $7\frac{7}{11}\ h$, $8\frac{8}{11}\ h$, $9\frac{9}{11}\ h$, $10\frac{10}{11}\ h$, $11\frac{11}{11}\ h = 12h$

Задатак 5. Милан је кренуо нешто пре 9 часова, а када је стигао, у неколико минута пре 12 часова, мала и велика казаљка су замениле места. Колико је времена Милан провео на путу и када је кренуо?

Решење: Велика казаљка обиђе пун круг док мала пређе дванаестину круга (5 минута). Ако са x означимо број минута које је Милан провео у путу, закључујемо да је за то време мала казаљка прешла $\frac{x}{12}$ минутних подеока, па је $x - 120 + \frac{x}{12} = 60$.

Одавде је $x = \frac{12}{13} \cdot 180 = 2^h 46\frac{2}{13}$ min. Ако је Милан кренуо y минута до 9, тада ће до 9^h велика казаљка прећи y минутних подеока, а мала $\frac{y}{12}$ минутних подеока. како је растојање између казаљки $\frac{180}{13} - \frac{y}{12} + y = 15$, одакле је $y = \frac{12}{11} \cdot \frac{15}{13}$

Закључак

Без рачунања времена односно часовника много тога не би функционисало. Познавање аритметике часовника и елемената конгруенције је важно за решавање загонетки из свакодневног живота. Садржина теме коју обрађује мој рад није испитана до краја. Она може да буде полазна основа заинтересованим ученицима ако се одлуче да прошире знања о овој области. Онај ко ишчитава овај рад није само обичан читалац, већ и сарадник у разрешавању неких својих недоумица везаних за часовник и рачунање времена.

Литература

[1.] М. Станић, Н. Икодиновић *Теорија бројева – збирка задатака,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.

[2.] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић *Увод у теорију бројева,* Друштво математичара Србије, Београд, 2004.

[3.] Е. Ведрал *Одабрана поглавља теорије бројева,* Архимедес, Београд, 2007.

[4.] *1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа, ,* Друштво математичара Србије, Београд, 2002.

[5.] Н. Икодиновић *Збирка задатака из теорије група,* Природно – математички факултет у Крагујевцу, Крагујевац, 2003.

[6.] В. Стојановић *О конгруенцијама,* Математископ, Београд, 1999-2000.

[7.] В. Стојановић *Водич за шампионе –* додатна настава за IV, V, VI разред, Математископ, Београд, 1999.

[8.] В. Андрић *Збирка припремних задатака са математичких такмичења ученика основних школа,* Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

[9.] Часопис *˝Математички лист˝*, Друштво математичара Србије, Београд, 1972.